ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES — ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE

ECOLE CENTRALE DE LYON — ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'admission 1979

MATHEMATIQUES II (T.A.)- (2 pages dactylographiées)

N.B.1.Les parties A et B sont indépendantes.
N.B.2.Les questions A-1, 2, 3 et 4 sont communes aux trois options M, P', T.A.

- A -

Notations : On donne :

- trois réels strictement positifs α, β, ρ, liés par $\alpha^2 + \beta^2 = \rho^2$;
- un espace affine euclidien orienté $\mathcal{E}$, associé à un espace vectoriel E, et rapporté à un repère orthonormé positif $\mathcal{R} = (O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

A et B sont les points de $\mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{OA} = (\beta + \rho)\vec{k}$ et $\overrightarrow{OB} = \alpha\vec{i}$;
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont les fonctions du temps, à valeurs dans E, définies par :

$$\overrightarrow{u(t)} = \vec{i} \cos t + \vec{j} \sin t \quad ; \quad \overrightarrow{v(t)} = \vec{k} \wedge \overrightarrow{u(t)}.$$

Un espace affine euclidien $\mathcal{E}'$ est mobile par rapport à $\mathcal{E}$; Σ est une sphère de $\mathcal{E}'$ de rayon ρ, centrée au point S de $\mathcal{E}'$. Le mouvement de $\mathcal{E}'$ par rapport à $\mathcal{E}$, noté $\mathcal{E}'/\mathcal{E}$, est défini par les trois conditions suivantes :

a) Un point de Σ (abusivement noté A) occupe à tout instant la position A dans $\mathcal{E}$;
b) A tout instant t, la position $\Sigma(t)$ de Σ dans $\mathcal{E}$ est tangente au plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ en le point P(t) tel que $\overrightarrow{OP(t)} = \alpha \overrightarrow{u(t)}$;
c) Le point de Σ qui occupe à l'instant t la position P(t) dans $\mathcal{E}$ admet, à cet instant t, un vecteur vitesse nul (dans son mouvement par rapport à $\mathcal{E}$).

1°- Montrer qu'à tout instantt il existe un axe instantané de rotation $\Delta(t)$ de $\mathcal{E}'/\mathcal{E}$ et déterminer cette droite.

Indiquer la nature des surfaces $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ qu'elle engendre relativement à $\mathcal{E}$ et relativement à $\mathcal{E}'$. Montrer qu'à tout instant t, la position $\mathcal{S}'(t)$ de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{E}$ est tangente à $\mathcal{S}$ en tous les points de $\Delta(t)$.

2°- Calculer les composantes dans la base $(\overrightarrow{u(t)}, \overrightarrow{v(t)}, \vec{k})$ de E du vecteur rotation instantanée $\vec{\Omega}(t)$ de $\mathcal{E}'/\mathcal{E}$ à l'instant t.

3°- Soit $\mathcal{R}' = (A ; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ le repère de $\mathcal{E}'$ tel que $\vec{I}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$ soient des fonctions dérivables du temps à valeurs dans E vérifiant les deux conditions :

a) A tout instant t, $(A ; I(t), J(t), K(t))$ est un repère orthonormé positif de $\mathcal{E}$ dans lequel :

$$\overrightarrow{K(t)} = \frac{\overrightarrow{AS(t)}}{\|\overrightarrow{AS(t)}\|} \quad ;$$

b) A l'instant t = 0, la fonction $\vec{I}$ prend la valeur $-\vec{j}$.

-Donner les composantes dans la base $(\overrightarrow{u(t)}, \overrightarrow{v(t)}, \vec{k})$ de E du vecteur $\overrightarrow{K(t)}$, et celles du vecteur $\vec{w}(t) = \vec{v}(t) \wedge \vec{K}(t)$

-Justifier l'existence d'une fonction ϕ du temps telle que $\vec{I} = \vec{w} \cos \phi + \vec{v} \sin \phi$; déterminer cette fonction (on calculera d'abord sa dérivée)

-Donner les composantes de $\overrightarrow{I(t)}$, $\overrightarrow{J(t)}$, $\overrightarrow{K(t)}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E ; en déduire les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$ de $\mathcal{E}$ de la position à l'instant t du point de $\mathcal{E}'$ dont les coordonnées (fixes) dans le repère $\mathcal{R}'$ sont (X,Y,Z).

4°- Dans toute la suite, on suppose $\beta = \frac{\rho}{2}$ et donc $\alpha = \frac{\rho\sqrt{3}}{2}$.

-Soit M le point de Σ qui coïncide avec B à l'instant t = 0. Calculer les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}'$ de $\mathcal{E}'$.

-Soit Γ la trajectoire de M dans son mouvement par rapport à $\mathcal{E}$. Montrer que Γ admet, dans le repère $\mathcal{R}_1 = (B ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la représentation paramétrique :

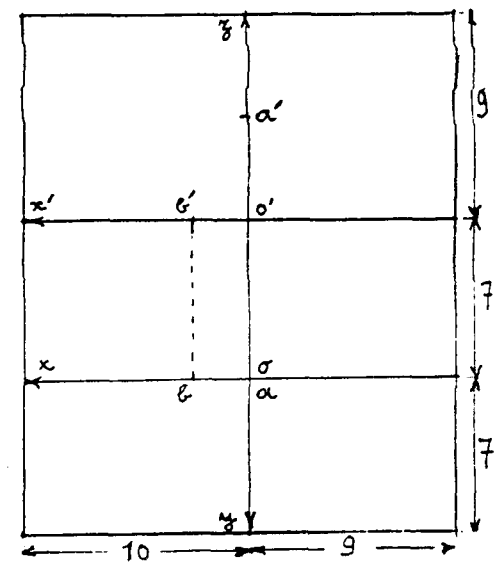
$$x_1 = \frac{3}{2}\alpha \cos t (1 - \cos t) \quad ; \quad y_1 = \frac{3}{2}\alpha \sin t (1 - \cos t) \quad ; \quad z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha (1 - \cos t).$$

.../...

- B -

Dans l'espace affine euclidien orienté $\mathcal{E}$ rapporté au repère orthonormé positif $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère :
-La sphère $\mathcal{S}$ de rayon 2α, de centre $A(0,0,\alpha\sqrt{3})$;
-Le cône de révolution $\mathcal{K}$ de sommet $B(\alpha,0,0)$, d'axe $(B,\vec{k})$, de demi-angle au sommet $\pi/3$.

1°- On se propose d'obtenir les projections de la courbe $\mathcal{L} = \mathcal{S} \cap \mathcal{K}$ *sur les plans de coordonnées en utilisant les méthodes de la géométrie descriptive.* On adoptera le centimètre pour unité de longueur et on posera $\alpha = 2{,}5$.
On n'utilisera pas de papier spécial ; l'épure sera tracée sur une feuille de composition ordinaire sur laquelle on tracera un cadre de 19 X 23. La mise en place (par rapport à ce cadre) est indiquée par le croquis ci-joint : l'axe $(O,\vec{i})$ est parallèle à la ligne de terre, l'axe $(O,\vec{j})$ est de bout, l'axe $(O,\vec{k})$ est vertical.



On demande de construire :
- un point courant de $\mathcal{L}$ et la tangente en ce point (On pourra utiliser des plans auxiliaires horizontaux ; il est rappelé que toutes les normales à une sphère contiennent le centre) .
-les projections horizontale et frontale de $\mathcal{L}$, ainsi que le rabattement sur le plan horizontal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ de la projection de $\mathcal{L}$ sur le plan de profil $(O ; \vec{j}, \vec{k})$
Les projections et le rabattement de $\mathcal{L}$ seront tracés en noir assez fort, les lignes de construction en rouge fin ou au crayon. Aucune question de représentation de solide ou de surface n'est posée. Aucune notice n'est nécessaire.

2°- Montrer que $\mathcal{L}$ n'est autre que la courbe Γ dont une représentation paramétrique est fournie dans l'énoncé de la question A, 4°. En déduire la nature de la projection frontale de $\mathcal{L}$.

°°°°°°°°°°°°°°°°°°°
°°°°°°°°°°°°°
°°°°°°°
°

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail